

Vom klassischen Spielerruinproblem zu Spiele- Strategien

**Univ. Doz. Dr. Stefan Wegenkittl
Fachhochschule Salzburg, Studiengang
Telekommunikationstechnik und -systeme**

Stefan.Wegenkittl@fh-sbg.ac.at

Stefan.Wegenkittl.com

Idee: Stochastische Modellierung und Interpretation

Spiel = {

- ▶ Zustände: Feld der Spielfigur, Kapital der Mitspieler
- ▶ Regeln: „Wenn A am Zug ist, muss sie 1 mal Würfeln und ...“
- ▶ Parameter: 2 Mitspieler, Anfangskapital: 10 €
- ▶ Zufallsinput: 1 mal Würfeln, eine Münze werfen, 1.000.000 Transaktionen simulieren

}

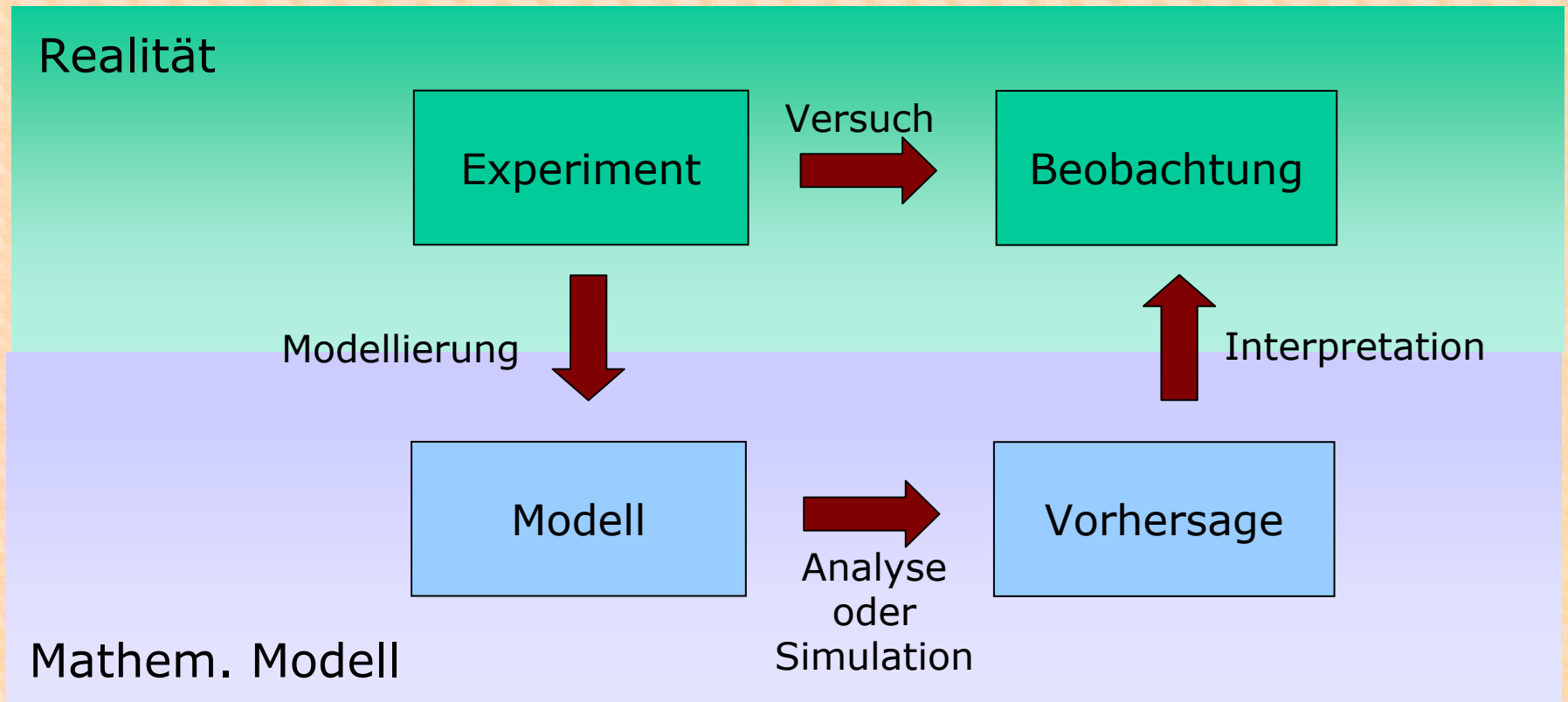
Prinzip: Zufall rein ➤ Zufall raus

Modellierung: Spiel = **Zufallsvariable** (Zufallsinput)

Mathematik der stochastischen Prozesse (Markovketten)



Ebenenmodell



Beispiel 1: „Gambler’s Ruin“

- ▶ 2 Spieler
- ▶ A besitzt 1 €
- ▶ B besitzt 10 €
- ▶ Spiel: Münzwurf, bei
 - ▶ Kopf: A gibt 1 € an B
 - ▶ Zahl: B gibt 1 € an A
- ▶ Spielende: Ruin von A oder B

? Wie lange dauert das Spiel im Mittel
? Wie sind die Gewinnchancen
? Wie ist der zu erwartende Gewinn



Beispiel 2: Das Teilungsproblem

- ▶ 2 Spieler: A,B
- ▶ Spieleinsatz pro Spieler: 100 €
- ▶ Pro Runde: Ein Münzwurf
 - ▶ Kopf ➤ 1 Punkt für A
 - ▶ Zahl ➤ 1 Punkt für B
- ▶ Wer zuerst 6 Punkte hat bekommt 200 €

? Wie lange dauert das Spiel im Mittel
? Wie sind die Gewinnchancen
? Wie ist der zu erwartende Gewinn



Beispiel 2: Das Teilungsproblem

▶ Beim Stand

▶ A: 4 Punkte

▶ B: 3 Punkte

muss das Spiel abgebrochen werden...

? Wie soll der Einsatz aufgeteilt werden



Klassische Interpretationen

▶ Sammlung:

- ▶ 70% : 30% „... aus dem Bauch heraus ...“
- ▶ 50% : 50% „eine faire Lösung gibt es nicht ...“
- ▶ 4/7:3/7 „im Verhältnis der gewonnenen Spiele“
- ▶ 6/11 : 5/11 „Nach spätestens 11 Spielen fertig ...“

▶ Begründungen:

- ▶ 15. Jhd.: „kaufmännischer Ansatz“
- ▶ 16. Jhd.: „noch zu gewinnende Spiele“
- ▶ Ende 16. Jhd.: Keine objektiv richtige Lösung möglich (Tartaglia)
- ▶ 14. Jhd.: Aufteilung des Einsatzes nach Gewinnchancen (Handschrift Nationalbibliothek Florenz)

▶ Heute: (Pascal-Fermat) nach Gewinnchancen: 11/16 : 5/16



Mathematisches Modell: Markovkette

▶ Markovkette:

- ▶ Zukunft ist abhängig von Gegenwart und zufälligen Parametern ...
- ▶ ... aber nicht von der Art und Weise, wie Gegenwart erlangt worden ist.

▶ „Endliches Gedächtnis“

- ▶ Beispiel: Mensch ärgerer Dich nicht
- ▶ Beispiel Planspiel: Spielzustand durch eine Menge von Zahlen beschreibbar, die mit der Spieldauer nicht größer wird.

▶ Wichtiges Tool: Simulation



Arbeitsgruppe Zufallszahlen

- ▶ pLab Server (Peter Hellekalek): <http://random.mat.sbg.ac.at>
- ▶ Idee: Simulation benötigt (Unmengen) an Zufallszahlen
 - ▶ Option Pricing: Integration in Dimension > 300 (Monte Carlo)
 - ▶ Discrete Event Simulation (Wartezeiten, Partikelsysteme, ...)
 - ▶ ...
- ▶ Am Computer: Pseudozufallszahlengenerator:
 - ▶ 0011011110110100111001010111111010100001011010...

? Selbst mit großem Aufwand nicht von fairer Münze zu unterscheiden



Der Gambling Test findet unfaire Münzen...

Münz-Spiel mit Runden

- ▶ In jeder Runde kann Spieler
 - ▶ passen
 - ▶ auf Kopf **K** setzen
 - ▶ auf Zahl **Z** setzen
- ▶ Er gewinnt Münze wenn das **gleiche** Symbol geworfen wird.

Strategie:

- ▶ Wenn Münze unfair ist, wird entweder **K** oder **Z** öfter vorkommen.
- ▶ Beobachte daher letzten 5 Ausfälle,
setze auf jenes Symbol, das öfter vorgekommen
 - ▶ **KKKZK** → **K** setzen

Passen, wenn nicht eindeutig...



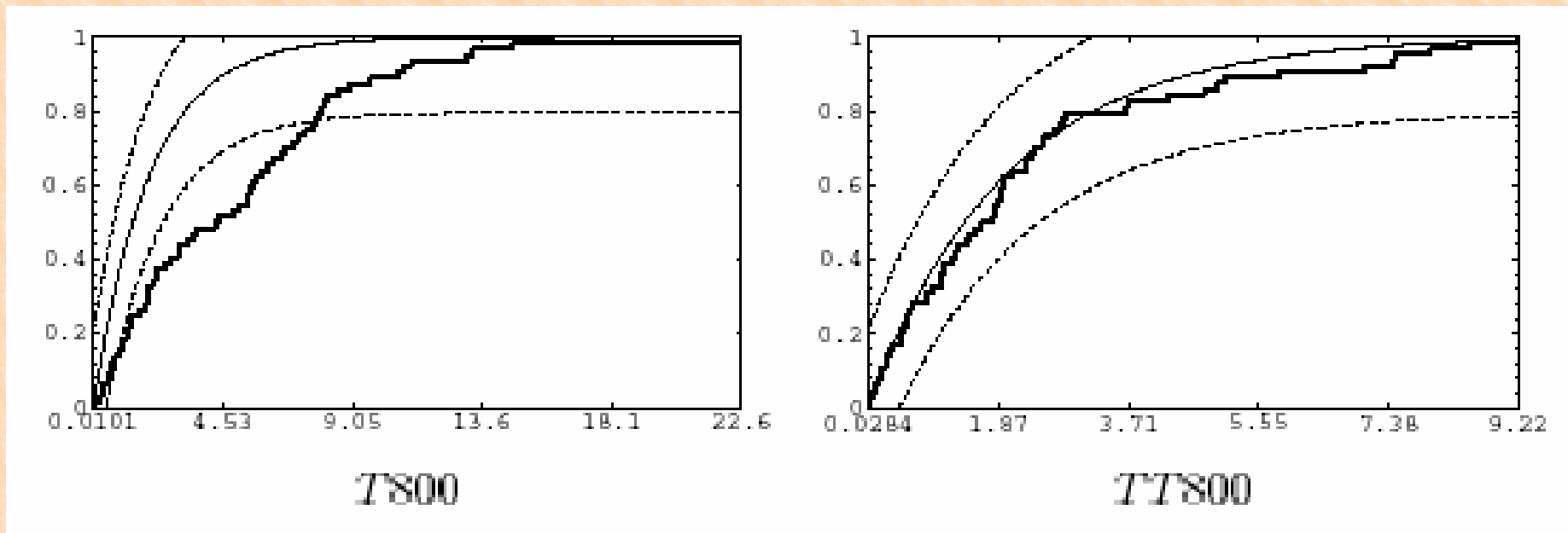
...im Hintergrund...

- ▶ Parameter in Praxis:
 - ▶ beobachte letzten 128 Spiele
 - ▶ spiele ca. 2^{24} Runden
- ▶ Berechnung einer Markovkette mit einer $2^{128} \times 2^{128}$ Matrix
 - ▶ Kovarianzen berechnen
 - ▶ Erwartungswerte berechnen
 - ▶ Schwache Inverse berechnen
- ▶ Man kann von jedem Ergebnis
 - ▶ „nach 2^{24} Runden habe ich w mal gewonnen und p mal gepasst“
sagen, wie wahrscheinlich es ist (**wenn die Münze fair ist**)!



T800 ist keine faire Münze, TT800 schon!

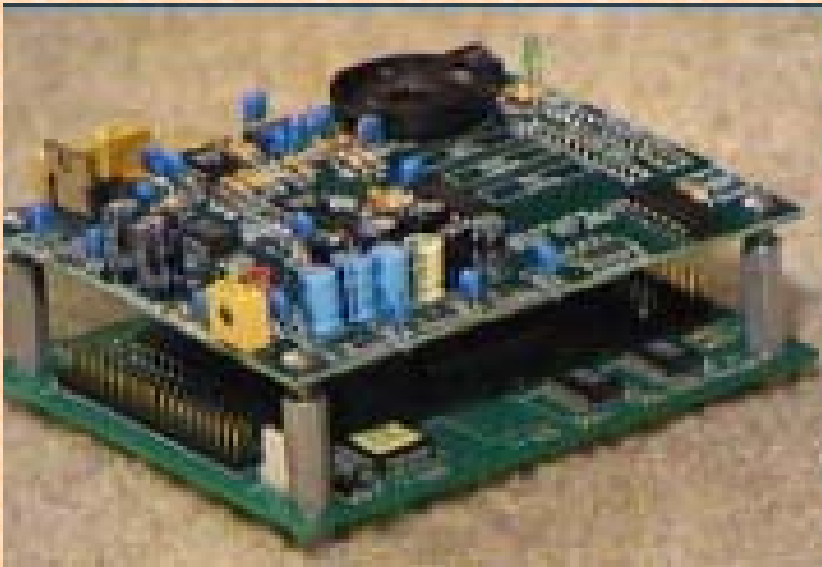
- ▶ Gedächtnis 52, 32 Wiederholungen, 2^{22} Runden



- ▶ T800: ein solches oder schlechteres Ergebnis nur in 1% der Fälle mit fairer Münze ▶ T800 wahrscheinlich nicht fair!

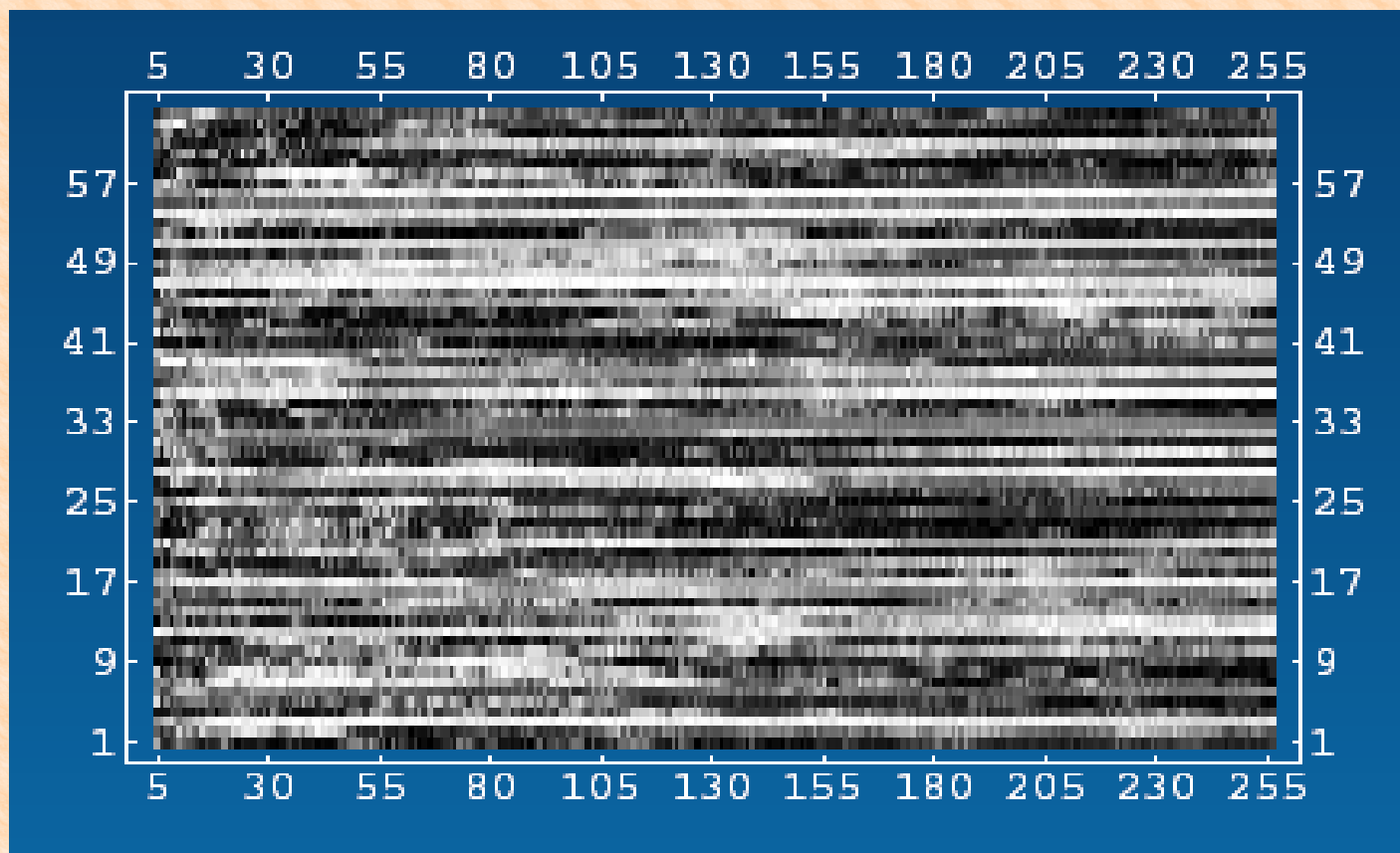
Der Generator RNG 241 (PDH International)

- ▶ Ein externer Hardwaregenerator für die Erzeugung sicherer geheimer Schlüssel
- ▶ Verstärktes Quantenrauschen



Gambling Tests: RNG241 verhält sich wie eine Münze

- ▶ Gedächtnis: 5-256, 64 Wiederholungen, 2^{20} Runden



Weiterlesen...

- ▶ NOEO Beitrag Heft 4/2003: S 42ff
- ▶ Peter Hellekalek and Stefan Wegenkittl. Empirical Evidence Concerning AES. ACM Trans. Model. Comput. Simul., 13(4):322–333, 2003.
- ▶ S. Wegenkittl. A generalized Phi-divergence for asymptotically multivariate normal models. Journal of Multivariate Analysis, 83:288–302, 2002.
- ▶ S. Wegenkittl. Entropy estimators and serial tests for ergodic chains. IEEE Transactions on Information Theory, 47(6):2480–2489, Sep 2001.
- ▶ www.stefan.wegenkittl.com

Danke für die Aufmerksamkeit!

